INTEGRALE DE LEBESGUE

L'intégrale de Riemann est suffisante pour traiter les problèmes classiques comme la résolution d'équations différentielles, définition des intégrales en géométrie différentielle etc.

Pour d'autres problèmes comme le passage à la limite sous le signe d'intégration ou la construction d'espaces complets par rapport à des normes définies par des intégrales, il faut élaborer des théories plus générales. Voyons ces problèmes de plus près:

* des fonctions hautement irrégulières (comme celle valant 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels) ne sont pas intégrables au sens de Riemann;

* l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann, lorsqu'il est muni de la semi-norme

[Notons que si f et g diffèrent en un nombre fini de points, alors $\|f-g\|_1 = 0$ tandis que $f-g \neq 0$; l'applic^n $f \longmapsto \|f\|_1$ n'est donc pas une norme, mais une <u>semi-norme</u>!]

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$$

n'est <u>pas</u> un espace <u>complet</u>, i.e., toute

suite de Cauchy n'y converge pas. Même si l'on se restreignait à l'espace des fonctions continues sur un segment $[a,b]$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, on n'aurait tjrs pas un espace complet; ce qui pose de nombreux problèmes théoriques;

* les théorèmes de convergence de l'intégrale de Riemann sont loins d'être puissant: e.g., on sait que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx .$$

Mais la condition de convergence uniforme est très forte et parfois fastidieuse à démontrer. On préférerait une condition plus élémentaire, e.g. celle de convergence simple. Ce sera, moyennant une simple propriété de domination, le contenu du célèbre théorème de la convergence dominée.

En complétant l'espace des fonctions continues pour la norme $\|\cdot\|_1$, l'intégrale de Lebesgue permet de résoudre de nombreux problèmes théoriques, et donne également des outils beaucoup plus puissants de:

- convergence;
- dérivation sous le signe somme;
- permutation des intégrales, etc.

Considérons le cas le plus simple: intégration sur $\mathbb{R}$. Nous cherchons à mesurer les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, i.e., associer à une partie $X \subset \mathbb{R}$ une mesure, notée $\mu(X)$, et qui soit la généralisation de la notion de <u>longueur</u> d'un segment. Nous voulons que la mesure μ vérifie les conditions suivantes:

(M1) Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, alors la mesure de $[a,b]$ est:

$$\mu([a,b]) = b-a = \mu(]a,b]) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b[)$$

(M2) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des sous-ens. de $\mathbb{R}$ disjoints et en nombre fini ou dénombrable alors

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mu(A_i)$$

Notamment, nous demandons que si $x\in\mathbb{R}$, la mesure $\mu(\{x\})$ du singleton $\{x\}$ soit nulle. C'est pourquoi la condition (M2), que l'on appelle <u>propriété de σ-additivité</u>, se restreint aux unions <u>dénombrables</u>: En effet, si l'on exigait l'additivité pour les unions nondénombrables, on aurait alors, e.g.,

$$[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]} \{x\} \Rightarrow \mu([0,1]) = \sum_{x\in[0,1]} \mu(\{x\}) = \sum_{x\in[0,1]} 0 = 0$$

ce qui serait en contradiction avec (M1):
$\mu([0,1]) = 1$.

Tribus:

Question: Peut-on construire une mesure μ, définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}$, et vérifiant (M1) et (M2)?

Malheureusement la réponse est NON!

En effet, l'hypothèse d'une telle mesure conduit à une contradiction.

Il faut donc se restreindre dans le choix des parties de $\mathbb{R}$ que nous voulons mesurer. Afin de choisir quelles parties de $\mathbb{R}$ on va essayer de mesurer, nous devons cerner d'abord les propriétés que nous en attendons: e.g., en supposant que A_1 et A_2 possèdent une mesure, on veut pouvoir assigner une mesure à $A_1 \cup A_2$. De plus, on aimerait étendre ce résultat aux unions infinies dénombrables. Donc on est amené à poser la

Définition 1: Soit X un ensemble qqe. On dit qu'une famille $\mathcal{T}$ de parties de X est une tribu si elle vérifie les propriétés suivantes:

($\mathcal{T}1$) $X \in \mathcal{T}$ et $\Phi \in \mathcal{T}$

($\mathcal{T}2$) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$

($\mathcal{T}3$) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{T}$.

Remarques:

1) ($\mathcal{T}2$) & ($\mathcal{T}3$) $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ est aussi stable par intersection dénombrable.

2) Si $\mathcal{T}$ est une tribu définie sur X, alors on dit que le couple $(X, \mathcal{T})$ est un <u>espace mesurable</u>.

3) Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont appelées <u>ensembles mesurables</u> de X.

Applications Mesurables:

<u>Définition 2:</u> Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une <u>application</u> $f: X \longrightarrow Y$ est <u>mesurable</u> si l'image réciproque par f de tout ensemble mesurable de Y est un ensemble mesurable de X :

$$A \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}.$$

[Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Y un <u>espace topologique</u> dont la famille des ouverts est $\mathcal{O}$. Pour simplifier le langage, on dira aussi qu'une application $f: X \to Y$ est <u>mesurable</u> si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ensemble mesurable de X :

$$A \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

On peut vérifier qu'une telle application est effectivement mesurable si l'on définit sur l'espace Y une certaine tribu $\mathcal{O}$ à partir de la famille des ouverts.]

Lorsqu'on parlera de fonctions (numériques) mesurables, l'espace Y sera tjrs l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la topologie habituelle.

Exemples:

1) X étant un ensemble qqe, la famille $\{X, \phi\}$ formée des deux parties X et ϕ est une tribu (la plus petite tribu de X).

2) L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une tribu (c'est la plus grande tribu de X).

3) Si $a \in X$, alors $\{\phi, X, \{a\}, X \setminus \{a\}\}$ est une tribu (c'est la tribu engendrée par $\{a\}$).

Propriétés des tribus:

Tribu induite sur un ensemble par une application:

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Y un ensemble qqe. Si f est une application de X dans Y, l'image de la tribu $\mathcal{T}$ n'est pas en général une tribu des parties de Y. Nous pouvons cependant définir une tribu sur Y à partir de $\mathcal{T}$:

Proposition 1: Soit f une application d'un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ dans Y. L'ensemble $\mathcal{U}$ des parties A de Y tq $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ est une tribu.

Démonstration: On utilise les propriétés des images réciproques pour vérifier (T1)-(T3):

i) $f^{-1}(Y) = X$ donc $Y \in \mathcal{U}$

$f^{-1}(\phi) = \phi$ donc $\phi \in \mathcal{U}$

ii) $f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \left(f^{-1}(A)\right)^c \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

iii) $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{U}.$ ∎

★ Tribu engendrée par une famille de parties:

(Définition et) Théorème 1: Soit X un ensemble qqe et $\mathcal{F}$ une famille qqe des parties de X. Il existe une tribu unique $\widetilde{\mathcal{F}}$ ayant les propriétés suivantes:

α) $\widetilde{\mathcal{F}}$ contient $\mathcal{F}$.

β) Toute tribu contenant $\mathcal{F}$ contient aussi $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Cette tribu $\widetilde{\mathcal{F}}$ est appelée la tribu engendrée par la famille $\mathcal{F}$ (c'est la "plus petite" tribu contenant $\mathcal{F}$).

Démonstration: Soit Ω l'ensemble de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$; $\Omega \neq \phi$ car il contient au moins la tribu $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X.

Considérons l'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}$ des parties de X qui appartiennent à toutes les tribus de Ω.

On peut écrire

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T},$$

l'intersection étant prise dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X.

Montrons d'abord que $\tilde{\mathcal{F}}$ est une tribu de parties de X:

i) $X \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $\Phi \in \tilde{\mathcal{F}}$, car ils appartiennent à toutes les tribus.

ii) $\tilde{\mathcal{F}}$ est stable par passage au complémentaire: En effet, si $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, alors $A \in \mathcal{T}$ $\forall \mathcal{T} \in \Omega$; par suite $A^c \in \mathcal{T}$ $\forall \mathcal{T} \in \Omega$, et donc $A^c \in \tilde{\mathcal{F}}$.

iii) $\tilde{\mathcal{F}}$ est stable par union dénombrable: En effet, si $A_i \in \tilde{\mathcal{F}}$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, ce sont des éléments de toutes les tribus $\mathcal{T}$ de Ω; par suite $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{T}$ $\forall \mathcal{T} \in \Omega$, donc $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \tilde{\mathcal{F}}$.

D'après sa définition, $\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$, et toute tribu contenant $\mathcal{F}$ appartient à Ω, et contient donc l'intersection $\tilde{\mathcal{F}}$.

Enfin, $\tilde{\mathcal{F}}$ est unique car, si $\mathcal{G}$ est une autre tribu vérifiant $\alpha)$ et $\beta)$, alors en appliquant la propriété à $\tilde{\mathcal{F}}$ puis à $\mathcal{G}$ montre que

$$\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}.$$

On a donc bien $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$. ∎

Tribu de Borel:

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts. La tribu engendrée par $\mathcal{O}$, notée $\tilde{\mathcal{O}} =: \mathcal{B}$, s'appelle la tribu de Borel de l'espace topologique X, et les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés ensembles de Borel (ou boréliens) de X.

Une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{B}$ est appelée fonction borélienne. En particulier, une fonction continue est borélienne.

La tribu $\mathcal{B}$ contient les ouverts et les fermés de X ainsi que les unions et intersections dénombrables d'ouverts et de fermés.

Boréliens de $\mathbb{R}$:

La tribu de Borel d'un espace topologique peut souvent être définie à partir de familles plus restreintes que la famille de tous les ouverts. Un résultat intéressant est le suivant:

Proposition 2: $\mathbb{R}$ étant muni de la topologie habituelle, sa tribu de Borel $\mathcal{B}$ est la tribu $\tilde{\mathcal{D}}$ engendrée par l'ensemble $\mathcal{D}$ des demi-droites de la forme $]-\infty, \alpha[$.

Remarque: Cette propriété sera fondamentale en théorie des probabilités, car elle nous permettra de ramener l'étude d'une variable aléatoire à celle de sa fonction de répartition.

Démonstration: D'abord, comme les demi-droites sont des ouverts particuliers, nous avons

$$\mathcal{B} \supseteq \tilde{\mathcal{D}}.$$

D'autre part, les demi-droites fermées $]-\infty, \beta]$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{D}}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\tilde{\mathcal{D}}$:

$$]-\infty, \beta] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, \beta + \tfrac{1}{n}[.$$

Un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ appartient aussi à $\tilde{\mathcal{D}}$ comme intersection de $]-\infty, \beta[$ et du complémentaire $]\alpha, +\infty[$ de $]-\infty, \alpha]$.

Comme dans $\mathbb{R}$ un ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, tout ouvert de $\mathbb{R}$ appartient à $\tilde{\mathcal{D}}$, et donc $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}$ d'après la propriété β) du théorème précédent. On a donc bien $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{D}}$. ∎

Remarques:

1) On peut vérifier de la même façon que la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ peut être engendrée par l'ensemble des demi-droites $]-\infty, \alpha]$ ou encore par l'ensemble des intervalles.
2) On vérifierait aussi que les tribus de Borel de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. peuvent être engendrées par l'ensemble des rectangles, parallélépipèdes, etc. à côtés parallèles aux axes.

Propriétés des fonctions mesurables:

La première propriété concerne la composition des applications mesurables:

Théorème 2: Soient X, Y, Z trois espaces mesurables et soient f et g deux applications mesurables, de X dans Y et de Y dan Z respectivement :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z .$$

L'application composée $g \circ f : X \to Z$ est mesurable.

Démonstration: L'image réciproque par g d'un ensemble mesurable de Z est un ensemble mesurable de Y, dont l'image réciproque par f est un ensemble mesurable de X. L'image réciproque par $g \circ f$ d'un ensemble mesurable de Z est donc un ensemble mesurable de X. ∎

Une démonstration analogue utilisant la caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (i.e., l'applic^{n} $f : E \to F$, où E, F sont espaces topologiques est continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert) donne immédiatement le résultat suivant :

Théorème 3: Soient X un espace mesurable, Y et Z deux espaces topologiques,

$f : X \to Y$ une fonction mesurable,

$\varphi : Y \to Z$ une fonction continue.

Alors l'application composée $\varphi \circ f : X \to Z$ est mesurable.

Remarque: Ce théorème appliqué en prenant comme espace topologique Z l'espace $\mathbb{R}$ et en choisissant convenablement l'espace intermédiaire Y (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) permet de montrer que de nombreuses opérations sur les fonctions numériques mesurables fournissent des fonctions numériques mesurables. En particulier: $\forall \alpha = C^{te}$ et $\forall f, g$ fonctions mesurables:

- αf est mesurable
- $f+g$ " "
- fg " "
- $|f|$ " " .

Caractérisation des applications mesurables:

Proposition 3: Soient (X, τ) un espace mesurable et Y un espace topologique. Une application $f: X \to Y$ est mesurable ssi l'image reciproque de tout borélien de Y est mesurable.

Démonstration:
$\Rightarrow$: D'après la Proposition 1, l'ensemble des parties A de Y telles que $f^{-1}(A)$ appartiennent à τ est une tribu. Comme f est mesurable, cette tribu contient les ouverts de Y, et donc les boréliens de Y (par le Thm. 1). Les images réciproques des boréliens sont donc mesurables.

$\Leftarrow$: Supposons que l'image réciproque de tout borélien soit mesurable. Comme les ouverts sont des boréliens particuliers, l'image réciproque de tout ouvert est mesurable. ∎

Caracterisation des fonctions numériques mesurables:

Pour savoir si une fonction numérique est mesurable, il n'est pas nécessaire d'étudier les images réciproques de tous les boréliens ou de tous les ouverts de $\mathbb{R}$: On peut se limiter aux ensembles d'une famille engendraut la tribu de Borel.

La caractérisation suivante des fonctions numériques mesurables est très utile (surtout en théorie des probabilités!):

Théorème 4: Soit (X, τ) un espace mesurable. Une fonction numérique f définie sur X est mesurable ssi l'image réciproque de toute demi-droite $]-\infty, \alpha[$ est mesurable.

Démonstration:

$\Rightarrow$: Supposons f mesurable. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la demi-droite $]-\infty, \alpha[$ est un ouvert. Son image réciproque est donc mesurable.

$\Leftarrow$: Supposons maintenant, que l'image réciproque de toute demi-droite soit mesurable. En suivant la même démarche que la preuve de la Prop^{n} 2, on montre que les images réciproques des demi-droites qques, puis des intervalles qques, puis des ouverts sont des ensembles mesurables de X. f est donc mesurable. ∎

On en déduit de ce théorème le résultat suivant:

Corollaire 4: Si φ et ψ sont deux fonctions numériques mesurables définies sur l'espace mesurable X, alors les fonctions

$$f := \max(\varphi, \psi) \quad \text{et} \quad g := \min(\varphi, \psi)$$

sont mesurables. En particulier, les fonctions

$$\varphi^+ = \max(\varphi, 0) \quad \text{et} \quad \varphi^- = \max(-\varphi, 0) = \min(\varphi, 0)$$

sont mesurables.

Propriété de passage à la limite:

Nous voulons montrer que la mesurabilité est une propriété qui se conserve par passage à la limite ponctuelle, ce qui sera très utile dans la théorie de l'intégration.

Théorème 5: Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions numériques mesurables convergeant ponctuellement vers la fonction f. Alors la fonction f est aussi mesurable.

Démonstration: Ce résultat provient encore du théorème précédent par l'intermédiaire de la formule:

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{h\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\geq k} f_n^{-1}\left(]-\infty, \alpha - \tfrac{1}{h}[\right),$$

qui est facile à vérifier. En effet:

• l'ensemble $E_{h,k} := \bigcup_{n \geq k} f_n^{-1}(]-\infty, \alpha - \frac{1}{h}[)$

est l'ensemble des éléments $x \in X$ tq $f_n(x) < \alpha - \frac{1}{h}$ pour au moins une valeur de $n \geq k$;

• l'ensemble $F_h := \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} E_{h,k}$

est l'ensemble des éléments $x \in X$ tq $f_n(x) < \alpha - \frac{1}{h}$ pour une infinité de valeurs de n. Cet ensemble contient donc tous les $x \in X$ tq $f(x) < \alpha - \frac{1}{h}$, et ne contient aucun $x \in X$ tq $f(x) \geq \alpha - \frac{1}{h}$;

• l'ensemble $\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} F_h$ contient tous les $x \in X$ tq $f(x) < \alpha$ et ne contient aucun élément $x \in X$ tq $f(x) \geq \alpha$: C'est donc bien $f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$. ∎

Mesures:

Définitions:

On note $\overline{\mathbb{R}^+}$ la demi-droite $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ complétée par $+\infty$.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On dit qu'une fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est <u>dénombrablement additive</u> si

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints :

$$A_i \wedge A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

On appelle <u>mesure</u> une fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ dénombrablement additive.

Si μ est une mesure et A un ensemble mble (i.e. un élément de $\mathcal{T}$), le nombre $\mu(A)$ s'appelle la <u>mesure</u> de l'ensemble A. Le triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ s'appelle un <u>espace mesuré</u>.

Si $\mu(X) < \infty$, on dit que la mesure μ est <u>bornée</u>.

Si X est un espace topologique et si $\mathcal{T}$ est la tribu de Borel $\mathcal{B}$, une mesure sur $(X, \mathcal{B})$ est appelée <u>mesure borelienne</u>.

<u>Remarque</u>: On peut définir de la même façon des mesures <u>réelles</u> (ou <u>complexes</u>) en remplaçant $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Propriétés des mesures :

a) Mesure de la partie vide

La partie vide ϕ a pour mesure 0 : $\mu(\phi) = 0$.

b) Additivité finie

Pour toute famille finie $A_1, \dots, A_N$ d'ensembles deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)$$

c) Monotonie

Si A et B sont deux ensembles tq $A \subseteq B$, on a

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

d) Continuité par union croissante

Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles mesurables et croissants ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$), alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

e) Continuité par intersection décroissante

Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles mesurables et décroissants ($A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$) et si $\mu(A_1) \neq \infty$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Le théorème suivant, dû à Carathéodory, nous assure de l'existence et de l'unicité d'une mesure définie sur l'ensemble des boréliens satisfaisant, de plus, la condition de σ-additivité:

★ **Théorème 6:** (Mesure de Lebesgue sur les boréliens) L'ensemble $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est un ensemble mesurable sur lequel $\exists!$ mesure μ tq

$$\mu([a,b]) = |b-a| \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

L'idée de base de la construction de cette mesure est la suivante:

On considère l'application "longueur", qu'on notera ℓ, qui à tout segment $[a,b]$

associe sa longueur $\ell([a,b]) = |b-a|$. On étend ensuite cette notion à une partie qqe de $\mathbb{R}$:

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une partie qqe de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{E}(A)$ l'ensemble des familles $\mathcal{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'intervalles tq $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i$. Pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(A)$, on pose

$$\lambda(\mathcal{A}) := \sum_{n=1}^{\infty} \ell(A_n),$$

et on définit la "mesure extérieure de Lebesgue" de A par:

$$\lambda^*(A) := \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{E}(A)} \lambda(\mathcal{A})$$

Malheureusement, la "mesure extérieure de Lebesgue" n'est pas une mesure, car elle n'est pas σ-additive.

En revanche, sa restriction aux boréliens:

$$\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \mu(A) = \lambda^*(A)$$

est une mesure (ce qui est délicat à prouver). On l'appelle mesure de Lebesgue sur les boréliens.

Remarques:

1) On peut montrer que la mesure μ est invariante par translation et qu'elle est diffuse, i.e. si Δ est une partie finie ou dénombrable, alors $\mu(\Delta) = 0$. Entre autres,

★ $\mu(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{Q}) = 0.$

La réciproque est fausse : L'ensemble triadique

de Cantor est de mesure nulle mais il n'est pas dénombrable!

2) La mesure de Lebesgue sur l'ensemble des boréliens est tout à fait suffisante pour beaucoup d'applications (notamment les espaces hilbertiens, distributions, transformations de Fourier, et surtout la théorie des probabilités).

Définition:

1) Une partie A aqe d'un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est dite négligeable ssi elle est de mesure nulle.

2) Une propriété P est dite vraie presque partout (p.p. en abrégé) si elle est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable. On dira également "P(x) est vraie pour presque tout x".

Exemples:

1) La fonction de Heaviside $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable p.p.

2) La fonction de Dirichlet $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est nulle p.p.

Construction de l'intégrale de Lebesgue

La procédure pour définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction qu'on suppose définie sur un espace mesuré (X, τ, μ) se fait par étapes:

a) On définit l'intégrale d'abord pour les fonctions étagées positives;

b) On étend la notion aux fonctions positives mesurables;

c) Enfin on généralise aux fonctions mbles à valeurs réelles ou complexes.

Définition: Une fonction $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite étagée si elle est mesurable, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Plus précisément, $\exists$ un nombre fini d'ensembles (A_i), $i \in [\![1,n]\!]$, formant une partition de X: $X = \bigcup A_i$, $A_i \cap A_j = \phi$ $\forall i \neq j$, et n nombres $\gamma_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $i \in [\![1,n]\!]$, tq

$$f = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i}$$

On peut vérifier immédiatement que si f et g sont étagées, alors les fonctions $f+g$, fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ sont étagées.

On démontre aussi, ce qui sera très important pour la suite, qu'on peut obtenir toute fonction mesurable comme limite ponctuelle d'une suite de fonctions étagées:

Proposition 5: Si f est une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, alors $\exists$ une suite $\{s_n\}$ de fonctions étagées tq

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f,$$

qui converge ponctuellement vers f.

Démonstration: On pose:

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \quad k \in [\![0, 2^{2n}]\!] \\ 2^n & \text{si } 2^n \leq f(x) \end{cases}$$

Chaque fonction s_n prend un nombre fini de valeurs, et est c^te sur des ensembles mesurables. La suite $\{s_n\}$ est évidemment croissante.

- Si $f(x) \neq \infty$, on a $|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ dès que n est assez grand (en fait, dès que $2^n > f(x)$), donc $\{s_n\}$ converge vers f.
- Si $f(x) = \infty$, on a $s_n(x) = 2^n$, donc $\{s_n\}$ tend aussi vers f. ∎

Définition: (de l'intégrale d'une fonction étagée)
Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i}$$

une fonction étagee sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, et soit E un ensemble mesurable. On appelle intégrale de f par rapport à μ sur l'ensemble E, le nombre (de $\overline{\mathbb{R}}^+$),

noté $\int_E f\,d\mu$, défini par :

$$\int_E f\,d\mu := \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, \mu(A_i \cap E).$$

En particulier, on a :

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, \mu(A_i).$$

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée :

a) Conditions pour que l'intégrale soit nulle :

(1) Si $f \equiv 0$ sur E, alors $\int_E f\,d\mu = 0$.

(2) Si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f\,d\mu = 0$.

b) Monotonie :

(3) Si $0 \leq f \leq g$, alors $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.

c) Propriétés relatives à l'ensemble d'intégration :

(4) Si $A \subseteq B$, on a $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$

(5) Si $A \cap B = \phi$, on a

$$\int_{A \cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$$

(6) Pour tout ensemble E mesurable, on a

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f\,\chi_E\,d\mu.$$

(7) $\left.\begin{array}{l} E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \\ E = \bigcup_{i \geq 1} E_i \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f\,d\mu.$

d) Propriétés d'additivité:

(8) Si $c \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$

(9) $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$

Intégration des fonctions mesurables positives:

Définition: Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable. On appelle intégrale de la fonction f par rapport à μ sur l'ensemble mesurable E le nombre (de $\overline{\mathbb{R}^+}$), noté $\int_E f\,d\mu$, défini par:

$$\int_E f\,d\mu := \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s:\text{étagée}}} \int_E s\,d\mu.$$

La borne supérieure est définie sur l'ensemble des fonctions étagées à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ et majorées par f. Cet ensemble n'est pas vide (la fonction $\equiv 0$ lui appartient toujours), et la borne supérieure existe donc toujours (elle peut être éventuellement égale à $+\infty$).

Propriétés de l'intégrale des fonctions mbles positives:

On peut vérifier que les propriétés (1)-(8) restent vraies. La propriété (9) est difficile

à demontrer directement. Elle va être une conséquence du théorème important suivant:

Théorème 7: (de la Convergence Monotone ou de Beppo Levi) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ t.q., $\forall x\in X$, on ait

$$0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq \dots$$

La fonction f définie par $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est mesurable, et on a:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu=\int_E f\,d\mu$$

pour tout ensemble mesurable $E\subset X$.

Démonstration: f est la limite simple de la suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables. Elle est alors mesurable par Thm.5. Donc:

$$\int_E f\,d\mu=\sup_{\substack{0\leq s\leq f\\ s:\text{etagée}}}\left\{\int_E s\,d\mu\right\}.$$

Or, l'intégrale laisse la monotonicité invariante pour les fonctions positives mesurables, donc

$$0\leq\int_E f_k\,d\mu\leq\int_E f_{k+1}\,d\mu\leq\dots\leq\int_E f\,d\mu,$$

i.e.,
$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\,d\mu\leq\int_E f\,d\mu.$$

Nous voulons montrer que $\int_E f\,d\mu\leq\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\,d\mu$

pour achever la démonstration. Soit s une fonction étagée satisfaisant $0 \leq s \leq f$. Si nous pouvons montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu \geq \int_E s \, d\mu \quad (*)$$

alors cela $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu$ est une majorante de l'ensemble

$$\left\{ \int_E s \, d\mu : s \leq f, \, s \text{ étagée} \right\}$$

Mais la plus petite borne supérieure, $\int_E f \, d\mu$ est $\leq$ à la majorante $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu$, c'est-à-dire

$$\int_E f \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu$$

et la démonstration serait complète.

Donc, il faut montrer $(*)$. Or, puisque s est positive et étagée, on a

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E \cap E_i),$$

où $c_i \geq 0$, $\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap E_i) = E$, et $E \cap E_i$ sont sous-ensembles mesurables deux à deux disjoints de E. Puisque $\int_E f_k$ est additive sur E, il suffit de montrer que

$$\lim_{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{E\cap E_i} f_k \, d\mu \right) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E \cap E_i),$$

et ceci sera établi si nous pouvons montrer que

$$\lim_k \int_{E\cap E_i} f_k \, d\mu \geq c_i \, \mu(E\cap E_i)$$

Or, si $c_i = 0$, c'est terminé. Supposons donc $c_i > 0$.

L'idée est de construire une suite croissante d'ensembles mesurables (B_k) qui "remplissent" $E\cap E_i$, et sur lesquels f_k est "proche" de c_i :
Soit $\alpha \in]0,1[$. On définit

$$B_k := \{x \in E\cap E_i : f_k(x) \geq \alpha c_i\}.$$

Ces ensembles sont mesurables, $B_k \subseteq B_{k+1}$, puisque $f_k \leq f_{k+1}$, et $\bigcup_k B_k = E\cap E_i$, car $f \geq s = c_i$ sur $E\cap E_i$. La suite $\{\mu(B_k)\}$ est croissante, et

$$\lim_k \mu(B_k) = \mu(E\cap E_i).$$

Mais

$$\int_{E\cap E_i} f_k \, d\mu \geq \int_{B_k} f_k \, d\mu \geq \alpha c_i \, \mu(B_k)$$

Donc :

$$\lim_k \int_{E\cap E_i} f_k \, d\mu \geq \alpha c_i \lim_k \mu(B_k)$$

$$= \alpha c_i \, \mu(E\cap E_i) \quad \blacksquare$$

Propriétés d'additivité de l'intégrale :

Proposition 6 : Si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, on a

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable E.

Démonstration: On considère deux suites de fonctions étagées $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ qui convergent en croissant vers f et g respectivement, ce qui est possible d'après la Propⁿ 5.

La suite $\{u_n\} := \{s_n + t_n\}$ converge ponctuellement en croissant vers $h := f+g$. On a:

$$\int_E (s_n+t_n)\,d\mu = \int_E s_n\,d\mu + \int_E t_n\,d\mu$$

(Propriété (9)), donc

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

d'après le théorème précédent. ∎

On déduit immédiatement de ce résultat que, pour un nombre fini de fonctions mesurables $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, on a

$$(+)\qquad \int_E \left(\sum_{k=1}^{\nu} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\nu} \int_E f_k\,d\mu$$

Proposition 7: (Permutation des signe $\sum$ & $\int$)
Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, on a

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n\,d\mu.$$

Démonstration: On applique le théorème de convergence monotone à la suite $f_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} u_n$, qui converge vers $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Or, $$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\nu} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\nu} \int_E u_n \, d\mu$$
par la propriété (+) précédente. Le TCM nous permet d'écrire donc:
$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n \, d\mu. \quad \blacksquare$$

Intégration des fonctions numériques

On arrive enfin à la dernière étape dans la construction de l'intégrale de Lebesgue. Ici on considère les fonctions définies sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rmq: Les valeurs ∞ ne seront plus permises pour la fonction, ni pour l'intégrale, en particulier à cause du fait qu'on ne peut donner un sens à $\infty - \infty$.

Nous posons: $$\left.\begin{aligned} f^+ &= \max(f, 0) \\ f^- &= \max(-f, 0) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} f &= f^+ - f^- \\ |f| &= f^+ + f^- \end{aligned}$$

Si f est mesurable, alors $f^{\pm}$ sont aussi; ainsi que $|f|$.
Nous dirons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble mesurable par rapport à la mesure μ si f est mesurable et si
$$\int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu < \infty$$
et donc si $\int_E f^{\pm} \, d\mu < \infty$.

On définit alors l'intégrale de la fonction f sur E par rapport à μ par:

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu,$$

qui est toujours un nombre fini.

Rmq: Si $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k$, τ est la tribu de Borel et si μ est la mesure de Borel, alors on note l'intégrale comme l'intégrale de Riemann ordinaire:

$$\int_E f(t)\,dt \text{ si } X=\mathbb{R}, \quad \int_E f(t_1,\dots,t_k)\,dt_1\dots dt_k \text{ si } X=\mathbb{R}^k \text{ etc.}$$

Propriétés des fonctions intégrables:

a) Linéarité: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall f, g$ fonctions mesurables sur un espace mesuré (X, τ, μ), on a

$$\int_E (\lambda f + g)\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

pour toute partie mesurable E de X.

b) Majoration:

- Si f est intégrable, alors

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$$

- Si f est mesurable et est majorée en valeur absolue par une fonc^n intégrable g: $|f| \leq g$, alors f est intégrable, et:

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

★ Théorème de la convergence dominée:

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables convergeant ponctuellement vers une fonction f et majorée par une fonction g intégrable:

$$|f_n| \leq g \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors la fonction f est intégrable et, pour tout ensemble mesurable E, on a:

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Démonstration: Remarquons tout d'abord que, d'après la propriété de majoration ci-dessus, les fonctions f_n sont intégrables.

Par le Thm. 5 (p.14), f est mesurable comme limite ponctuelle de fonctions mesurables, et est majorée par la fonction intégrable g. La fonction f est donc intégrable.

Démontrons ensuite que

$$\lim_{n \to \infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Nous appliquerons le TCM (Thm. 7) à la suite $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions positives définies par

$$g_k := \inf_{n \geq k} \left(2g - |f_n - f| \right),$$

qui converge en croissant vers $2g$. Par le Thm 4 nous savons que les fonctions g_k sont mesurables, et l'on a :

$$g_k \leqslant 2g - |f_k - f|$$

$$\int_E g_k \, d\mu \leqslant \int_E 2g \, d\mu - \int_E |f_k - f| \, d\mu$$

En prenant la limite inf$_k \uparrow \infty$ des deux membres :

$$\int_E 2g \, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\int_E 2g \, d\mu - \int_E |f_k - f| \, d\mu \right)$$

$$\leqslant \int_E 2g \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, d\mu$$

Nous avons donc :

$$0 \geqslant \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, d\mu \quad \left(\geqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, d\mu \geqslant 0 \right).$$

On en déduit alors : $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, d\mu = 0$.

Par suite :

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_E (f_k - f) \, d\mu \right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \int_E (f_k - f) \, d\mu = 0,$$

ce qui donne bien

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu \qquad \blacksquare$$

Remarques :

1) Ce théorème est l'un des plus importants de la théorie de l'intégration. Il montre que

l'intégrale qu'on vient de définir se comporte bien pour les passages à la limite les plus simples (ponctuel, majoré).

2) Sous la forme qu'on vient de lui donner, il a un inconvénient qui limiterait ses applications: La convergence doit avoir lieu pour <u>tous</u> les points vers une valeur <u>finie</u> (de manière que f soit aussi à valeurs dans $\mathbb{R}$). On peut montrer que sur les théorèmes de passage à la limite, ces hypothèses peuvent être affaiblies.

Intégrales multiples, théorème de Fubini:

Nous considérons le problème d'intégration d'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^N$, $N>1$, par rapport à la mesure de Lebesgue.

Prenons d'abord le cas particulier où la fonction à intégrer est positive:

<u>Théorème (Fubini-Tonelli):</u> Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ dans $[0,+\infty]$. Alors:

(i) les fonctions Φ et Ψ définies respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ par

$$\Phi(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \;;\; \Psi(y)=\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$$

sont boréliennes;

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Remarques:

1) Ce théorème nous permet de calculer des intégrales multiples par intégrations successives dans l'ordre que l'on désire avec la seule hypothèse f positive.
2) Soit $f:(x,y)\longmapsto f(x,y)$ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ dans $[0,+\infty]$. Alors:
   - $\forall x\in\mathbb{R}^p$, la fonction qui à $y\in\mathbb{R}^q$ associe $f(x,y)$ est borélienne et donc l'intégrale
   $$\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \leqslant +\infty$$
   est bien définie.
   - $\forall y\in\mathbb{R}^q$, la fonction qui à $x\in\mathbb{R}^p$ associe $f(x,y)$ est borélienne et donc l'intégrale
   $$\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \leqslant +\infty$$
   est bien définie.

La généralisation de ce théorème aux fonctions quelconques est donnée par:

★ Théorème de Fubini:

Soit $f:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction borélienne.

1) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, i.e.,
$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dx\,dy < +\infty,$$
alors:

(i) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$, et la fonction $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$, qui est définie p.p., est intégrable sur $\mathbb{R}^p$;

(ii) pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, et la fonction $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$, qui est définie p.p., est intégrable sur $\mathbb{R}^q$;

(iii) $$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2) Si l'une des trois intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dx\,dy$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy \right) dx$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,dx \right) dy$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres, f est intégrable et on a les égalités de (iii) ci-dessus.

Remarques:

1) Pour prouver que f est intégrable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on applique le Théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ qui affirme que I_1, I_2 et I_3 sont égales

(qu'elles soient finies ou non), puis on montre que I_2 ou I_3 est finie.

2) Il faut bien distinguer le cas f mesurable positive où les trois intégrales I_1, I_2 et I_3 ont toujours un sens (valeur finie/infinie) du cas où f est <u>de signe variable</u> pour lequel les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \& \quad \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

peuvent ne pas exister, ou bien peuvent exister avec des valeurs finies/infinies, distinctes ou égales, sans que f soit intégrable.

3) Dans la pratique on rencontre souvent le cas où $f(x,y) = g(x)\,h(y)$. Si g et h sont respectivement intégrables sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, alors:

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} g(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^q} h(y)\,dy.$$

4) Dans le cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, une des applications les plus fréquentes du théorème de Fubini consiste à utiliser l'égalité suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left\{\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right\}dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right]dy,$$

pour évaluer d'autres intégrales.